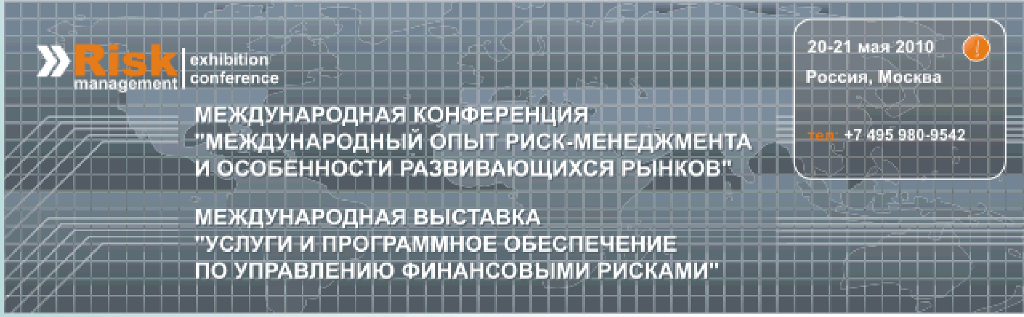
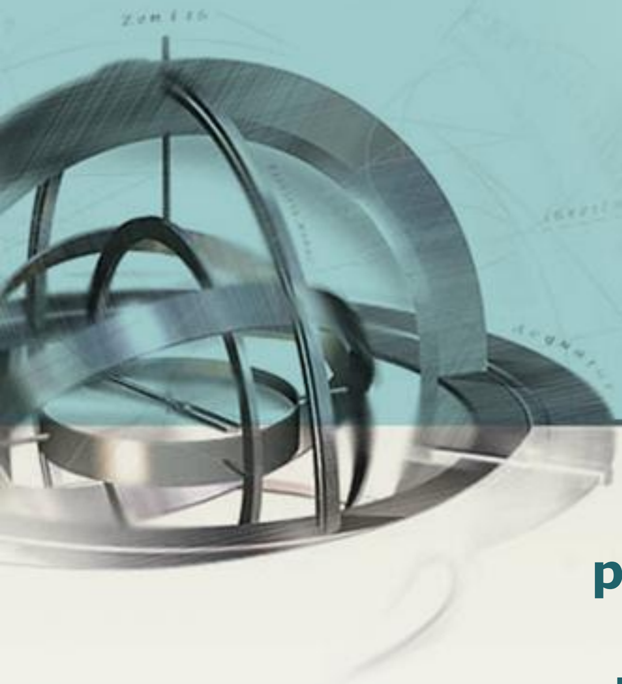


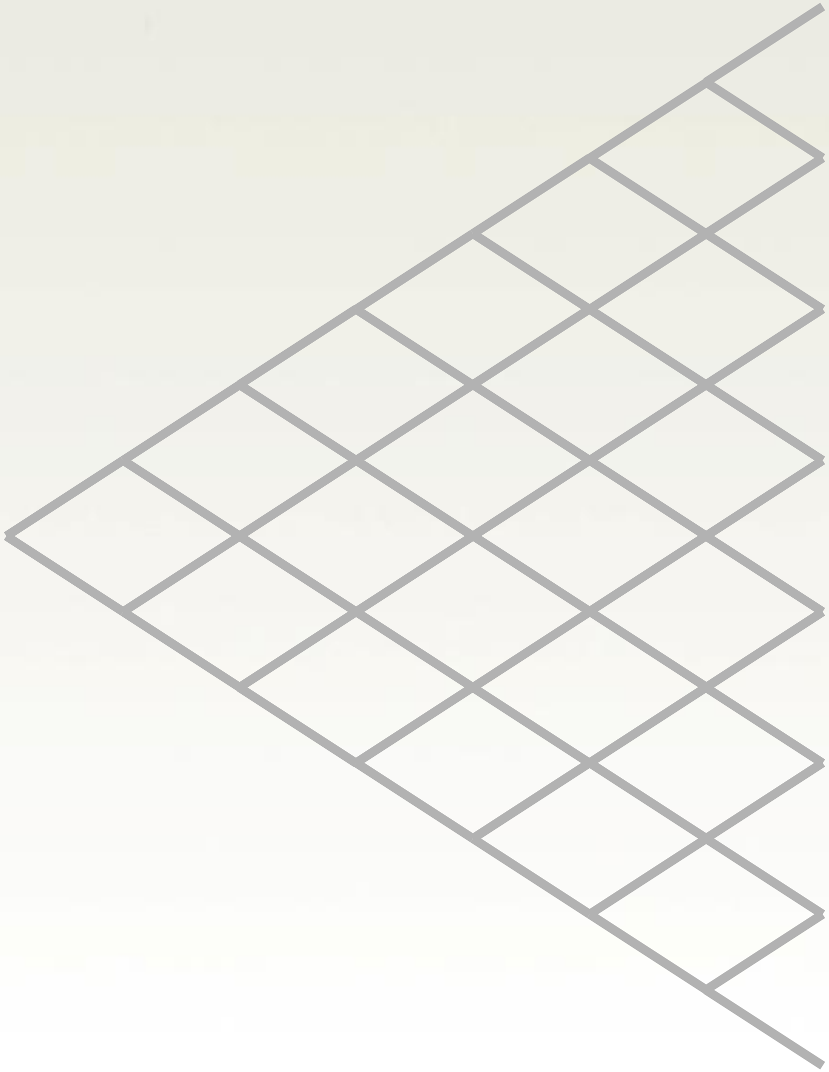


Построение биномиального рекомбинирующего дерева с переменным шагом для моделирования портфеля производных финансовых инструментов

Абрамов А. М.

БАНК ЗЕНИТ
БАНКОВСКАЯ ГРУППА ЗЕНИТ

Многоэтапное управление



Многоэтапное управление

- Управление портфелем на основе многоэтапного стохастического программирования позволяет учитывать возможность поступления в будущем новой информации.

- Подобное управлении портфелем производных финансовых инструментов требует моделирования изменения цены базового для производных инструментов актива. Для этой цели широко используются древовидные модели.

- Дерево должно содержать вершины, соответствующие моментам экспирации опционов. Вследствие этого периоды времени между соседними этапами дерева могут быть неодинаковы.

Дерево сценариев

Цена акции либо увеличивается в u раз, либо уменьшается пропорционально величине d (рис. 1). Вероятность роста цены акции равна p, тогда вероятность снижения составляет $1-p$.

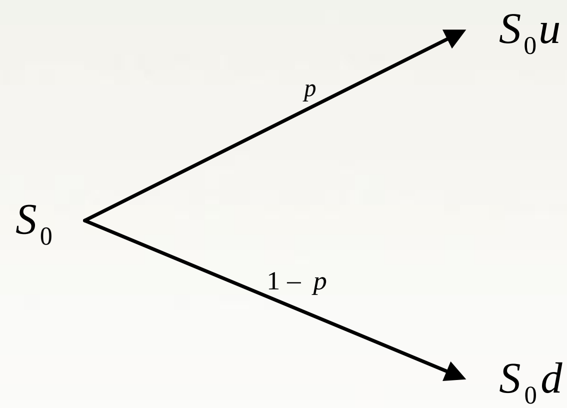


Рис. 1. Изменение цены акции в момент Δt

Сопоставление математического ожидания

Чтобы сопоставить цену акции, ожидаемую в конце первого расчетного интервала, и цену акции, вычисленную с помощью биномиального дерева, запишем соответствующее уравнение:

$$pS_0u + (1-p)S_0d = S_0e^{r\Delta t} \Rightarrow$$

$$pu + (1-p)d = e^{r\Delta t} \Rightarrow$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \qquad (1)$$

Сопоставление дисперсии - 1

Дисперсия доходности акции пропорциональна времени и равна $\sigma^2 \Delta t$.

Запишем дисперсию доходности за время Δt, определенную с помощью биномиального дерева:

$$\left[\sigma\left(\frac{S_{\Delta t} - S_0}{S_0}\right)\right]^2 = \left[\sigma\left(\frac{S_{\Delta t}}{S_0} - 1\right)\right]^2 = \left[\sigma\left(\frac{S_{\Delta t}}{S_0}\right)\right]^2 = M\left(\left(\frac{S_{\Delta t}}{S_0}\right)^2\right) - \left[M\left(\frac{S_{\Delta t}}{S_0}\right)\right]^2 =$$

$$= \left(pu^2 + (1-p)d^2\right) - \left[pu + (1-p)d\right]^2$$

т.к. $M\left(\frac{S_{\Delta t}}{S_0}\right) = pu + (1-p)d$,

где $S_{\Delta t}$ — цена, ожидаемая на дереве через время Δt;

$M\left(\frac{S_{\Delta t}}{S_0}\right)$ — математическое ожидание отношения цены через время Δt к текущей цене.

Сопоставление дисперсии - 2

Чтобы сопоставить волатильность доходности акции с параметрами дерева, составим следующее уравнение:

$$pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 = \sigma^2 \Delta t \quad (2)$$

Подставляя выражение (1) в (2), получаем

$$e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t} = \sigma^2 \Delta t \quad (3)$$

График зависимости , вытекающей из уравнений (1) и (3)

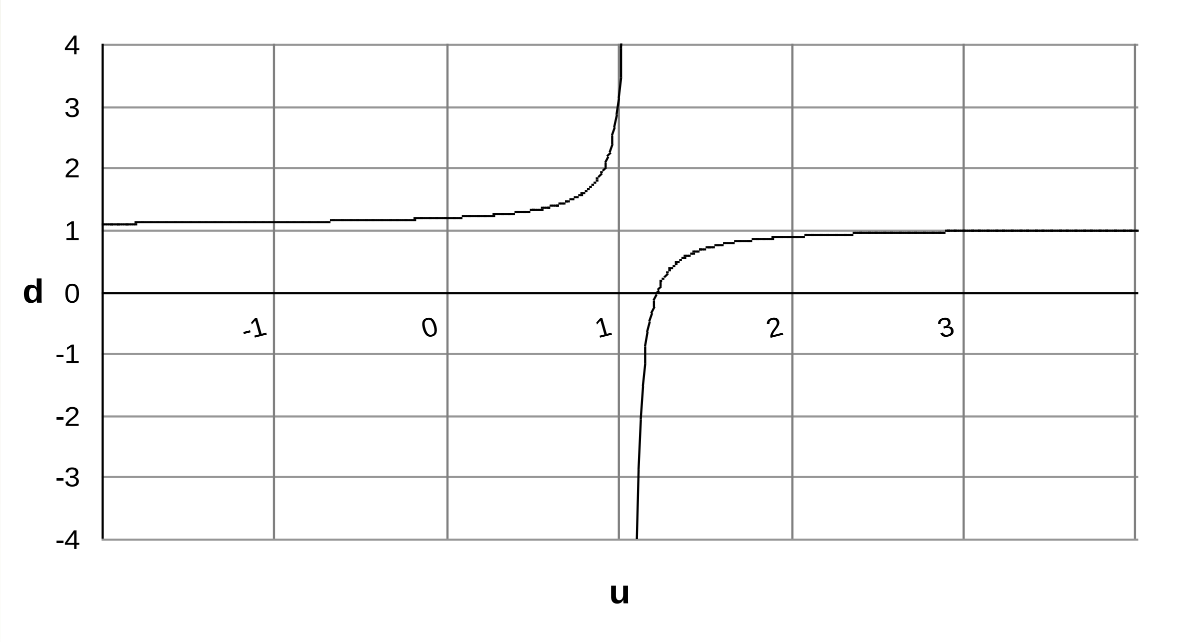


Рис. 2. График зависимости $d(u)$, вытекающей из уравнений (1) и (2)

В точке $u = e^{2r\Delta t} > 1$ функция $d(u)$ терпит разрыв.

Задача построения дерева как задача оптимизации

$$f(\overline{p}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\left(p_j^i - 0.5\right)^2 \to \min$$

$$p_j^i u_j^i + (1 - p_j^i) d_j^i = e^{r\Delta t_j} \qquad \forall (i,j): j = 1..n, \quad i = 1..j \qquad (4)$$

$$p_j^i {u_j^i}^2 + (1 - p_j^i) {d_j^i}^2 - (p_j^i u_j^i + (1 - p_j^i) d_j^i)^2 = \sigma^2 \Delta t_j \qquad \forall (i,j): j = 1..n, \quad i = 1..j \qquad (5)$$

$$s_j^i u_j^i = s_{j+1}^i \qquad \forall (i,j): j = 1..(n-1), \quad i = 1..j \qquad (6)$$

$$s_j^i d_j^i = s_{j+1}^{i+1} \qquad \forall (i,j): j = 1..(n-1), \quad i = 1..j \qquad (7)$$

$$s_1^1 = S_0 \qquad (8)$$

$$0 < d_j^i < 1, \qquad (9)$$

где j — номер этапа дерева; i — номер вершины на этапе j; s_j^i — значение цены в узле (i, j); u_j^i — значение коэффициента роста цены из узла (i, j); d_j^i — значение коэффициента снижения цены из узла (i, j); p_j^i — значение вероятности роста с коэффициентом u_j^i в узле (i, j); Δt_j — величина приращения времени между этапами j и $j+1$ в годах; S_0 — значение цены в начальный момент времени $(1,1)$.

Пример построения биномиального дерева с переменным шагом

Акция характеризуется следующими параметрами:

текущая цена акции $S_0 = 100$,

безрисковая ставка $r = 5\%$ в год,

волатильность доходности акции $\sigma = 30\%$ в год.

Приращение времени между этапами $\Delta t \in \{0.03; 0.02; 0.01; 0.025; 0.015\}$.

					217,15
				214,56	
			143,25		143,62
		141,91		141,62	
	102,61		102,23		102,00
100,00		101,37		100,69	
	69,64		69,64		69,79
		68,95		68,75	
			50,92		50,92
				50,08	
					38,46

1	2	3	4	5	6

Рис. 3. Биномиальное дерево цен акций с переменным шагом, содержащее 6 этапов

Стоимость опциона по дереву

Стоимость опциона f, рассчитанная по дереву, равна

$$f = e^{-r\Delta t}\left(pf_u + (1-p)f_d\right),$$

где f_u — стоимость опциона в случае роста цены базового актива пропорционально величине u;

f_d — стоимость опциона в случае снижения цены базового актива пропорционально величине d. Остальные обозначения соответствуют введенным ранее.

Стоимость опциона в момент экспирации T равна

$$o_c = \max(S_T - K, 0),$$

$$o_p = \max(K - S_T, 0),$$

где o_c — стоимость опциона «колл», o_p — стоимость опциона «пут», K — цена исполнения опциона.

Стоимость опциона по модели Блэка — Шоулса

Формулы Блэка — Шоулса, предложенные в [3], для вычисления цен европейских опционов на покупку и продажу бездивидендных акций в момент t имеют следующий вид

$$o_c = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2),$$

$$o_p = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1).$$

Здесь

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / K) + (r + \sigma^2 / 2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t / K) + (r - \sigma^2 / 2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}.$$

					148,15
				145,61	
			74,39		74,62
		73,08		72,68	
	33,87		33,37		33,00
31,48		32,56		31,74	
	2,37		1,70		0,79
		1,64		0,75	
			0,04		0,00
				0,00	
					0,00
1	2	3	4	5	6

Рис. 4. Оценки стоимости опциона, рассчитанные по дереву

					148,15
				145,61	
			74,38		74,62
		73,08		72,68	
	33,85		33,37		33,00
31,34		32,54		31,74	
	2,66		2,08		0,79
		1,90		0,91	
			0,00		0,00
				0,00	
					0,00

1	2	3	4	5	6

Рис. 5. Оценки стоимости опциона, рассчитанные по модели Блэка — Шоулса

					0,00%
				0,00%	
			0,00%		0,00%
		0,00%		0,00%	
	0,07%		0,00%		0,00%
0,42%		0,07%		0,00%	
	–11,10%		–18,24%		0,00%
		–13,97%		–17,88%	
			–		0,00%
				0,00%	
					0,00%
1	2	3	4	5	6

Рис. 6. Относительные отклонения стоимости опциона в узлах дерева, рассчитанной по дереву, от стоимости, полученной по модели Блэка – Шоулса.

Спасибо за внимание!

С уважением,

Анатолий Абрамов

ОАО Банк ЗЕНИТ

E-mail: a.abramov@zenit.ru