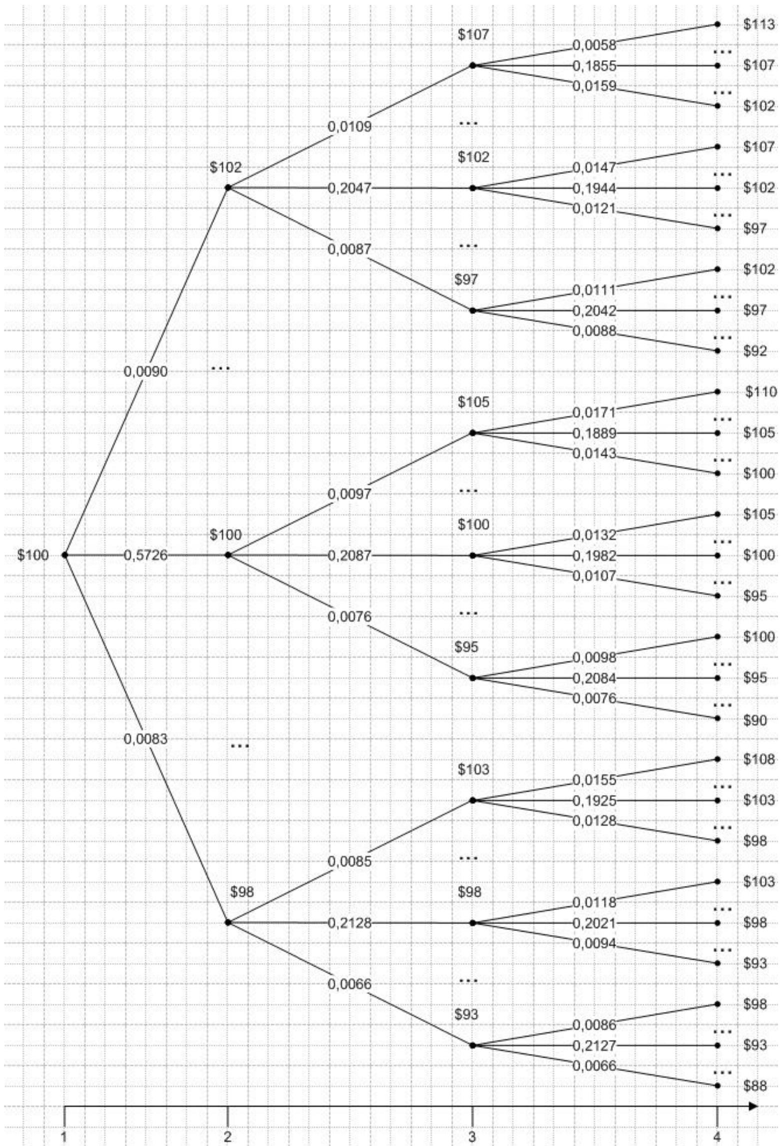
Управление портфелем опционов на основе многоэтапного стохастического программирования

Модель рынка опционов

- риск-нейтральный рынок;
- арбитражные возможности отсутствуют;
- процесс изменения цены базового актива S следует геометрическому броуновскому движению с ожидаемой доходностью μ, равной безрисковой процентной ставке r, и постоянной волатильностью σ;
- на рынке обращаются европейские опционы разных сроков экспирации и разных страйков на один вид базового актива;
- цены опционов определяются по формулам Блэка-Шоулса
- возможность торговли базовым активом отсутствует;
- при покупке или продаже опциона уплачивается комиссия c;
- величина гарантийного обеспечения определяется в соответствие с первым шагом методики SPAN.

Дискретная модель изменения цены базового актива опционов – дерево сценариев



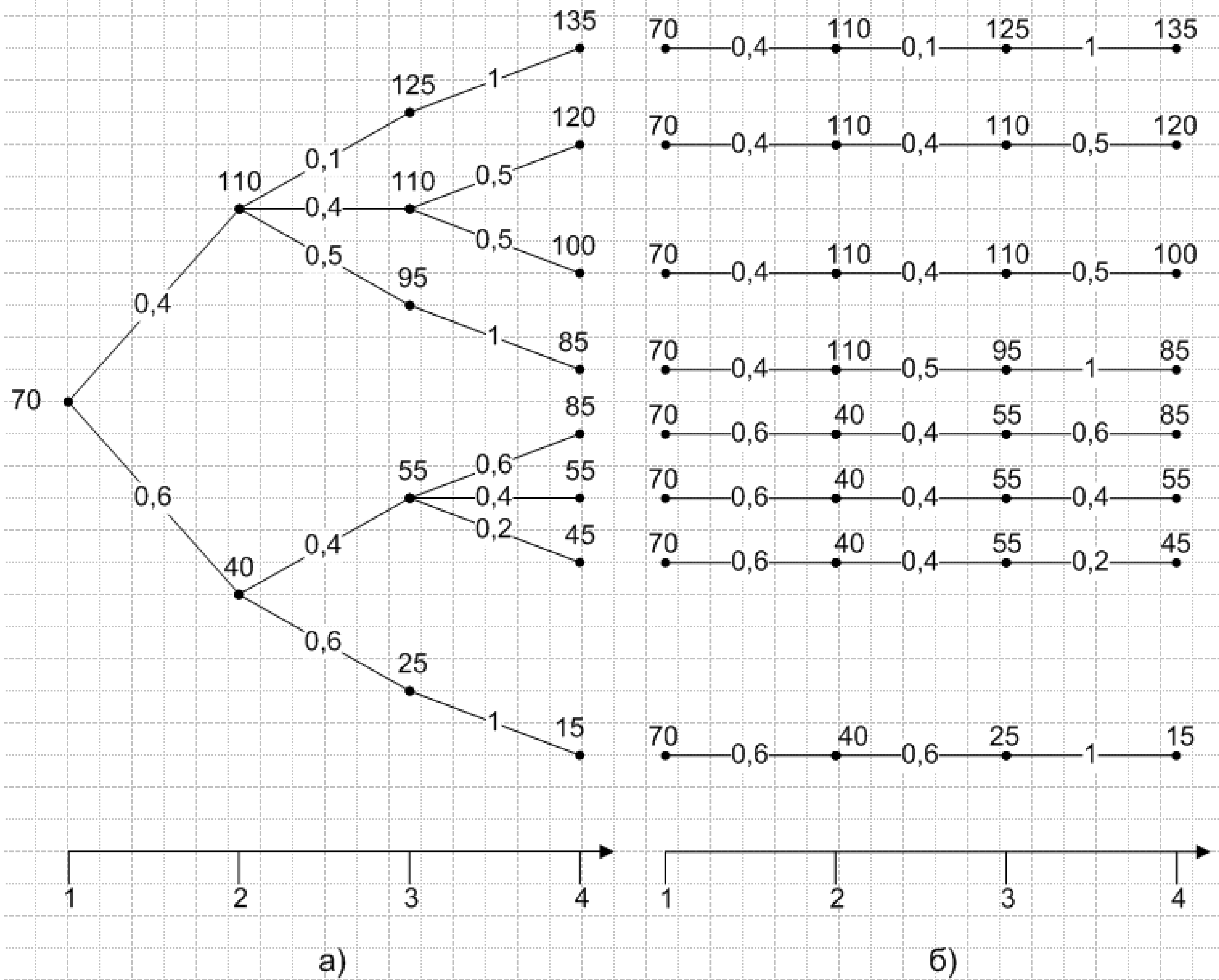
Параметры дерева:

- текущая цена базового актива равна $100;
- ожидаемая доходность $\mu = 0$;
- волатильность $\sigma = 0{,}1$;
- этапы соответствуют дням $\{1, 2, 11, 21\}$;
- шаг сетки дерева $\Delta g = 1$;
- параметр $q = 2{,}326$.

На дереве, содержащем 4 этапа, представлено 608 сценариев.

Числа, относящиеся к узлам, обозначают соответствующую цену базового актива.

Числа на дугах обозначают вероятности движения от узла-предка к узлу-последователю


70
0,4
0,6
110
40
0,1
0,4
0,5
125
110
95
1
0,5
0,5
1
135
120
100
85
55
25
0,6
0,4
0,2
1
85
55
45
15
1
2
3
4
а)
70 0,4 110 0,1 125 1 135
70 0,4 110 0,4 110 0,5 120
70 0,4 110 0,4 110 0,5 100
70 0,4 110 0,5 95 1 85
70 0,6 40 0,4 55 0,6 85
70 0,6 40 0,4 55 0,4 55
70 0,6 40 0,4 55 0,2 45
70 0,6 40 0,6 25 1 15
1
2
3
4
б)

Модель оптимального управления портфелем опционов

$\{1, ..., T\}$ – множество рассматриваемых на инвестиционном периоде моментов времени, $t = T$ – терминальный момент времени, соответствующий инвестиционному горизонту.

$\tau = 1, ..., \mathrm{T}$ – номер этапа принятия решения. Этап $\tau = 1$ соответствует начальному моменту времени $t = 1$. Этап $\tau = \mathrm{T}$ соответствует терминальному моменту времени $t = T$. Каждый элемент множества этапов $\{1, ..., \mathrm{T}\}$ соответствует одному из элементов множества моментов времени $\{1, ..., T\}$.

$\nu = 1, ..., \mathrm{N}$ – номер сценария изменения цены базового актива.

$p_\nu :\ \nu = 1, ..., \mathrm{N}$ – вероятность реализации соответствующего сценария.

M_τ – множество месяцев экспирации опционов, обращающихся на рынке на этапе τ.

$\overline{M}_\tau \subseteq M_\tau$ – множество месяцев экспирации опционов, момент экспирации которых соответствует этапу τ. На предложенном модельном рынке данное множество либо пусто, либо содержит единственный элемент.

$m \in M_\tau$ – индекс месяца экспирации опциона.

$H_{\tau\nu}^{m}$ – множество страйков опционов, экспирирующихся в месяце m на этапе τ при осуществлении сценария ν.

$h \in H_{\tau\nu}^{m}$ – индекс страйка опциона.

$I = \{call, put\}$ – множество типов опционов, где $"call"$ и $"put"$ означает соответственно опционы колл и пут.

$i \in I$ – индекс типа опциона.

$w_{\tau\nu}^{mih}$ – цена опциона на этапе τ при осуществлении сценария ν, рассчитанная по формуле Блэка-Шоулса.

$x_{\tau\nu}^{mih}$, $y_{\tau\nu}^{mih}$: $\tau = 1, ..., \mathrm{T}$, $\nu = 1, ..., \mathrm{N}$, $m \in \left(M_{\tau} \backslash \overline{M}_{\tau}\right)$, $h \in H_{\tau\nu}^{m}$, $i \in I$ – число соответствующих опционов, рекомендуемых соответственно к покупке и к продаже на этапе τ при осуществлении сценария ν. На этапе τ для торговли доступны все обращающиеся на рынке опционы, за исключением экспирирующихся на данном этапе. Переменные определены на множестве неотрицательных действительных чисел.

$z_{\tau\nu}^{mih}$: $\tau = 1, ..., \mathrm{T}$, $\nu = 1, ..., \mathrm{N}$, $m \in M_{\tau}$, $h \in H_{\tau\nu}^{m}$, $i \in I$ – число соответствующих опционов в портфеле до его перестройки на этапе τ при осуществлении сценария ν. Значение $z_{\tau\nu}^{mih}$ положительно, если позиция длинная, и отрицательно, если позиция короткая. В начальный момент времени переменная $z_{1\nu}^{mih}$ равна заданному числу соответствующих опционов z_{0}^{mih}, фактически находящихся в портфеле.

$A_{\tau\nu}$: $\tau = 1, ..., \mathrm{T}$, $\nu = 1, ..., \mathrm{N}$ – остаток счета до перестройки портфеля на этапе τ при осуществлении сценария ν. В начальный момент времени остаток счета $A_{1\nu}$ равен заданному фактическому остатку счета A_{0}.

$L_{\tau\nu}$: $\tau = 1, ..., \mathrm{T}$, $\nu = 1, ..., \mathrm{N}$ – ликвидационная стоимость портфеля на этапе τ при осуществлении сценария ν. Если ликвидационная стоимость положительна, то для закрытия позиции необходимы денежные средства в объеме $L_{\tau\nu}$. Если ликвидационная стоимость отрицательна, то в результате закрытия позиции могут быть получены денежные средства в объеме $-L_{\tau\nu}$.

Для формулировки ограничений *незнания будущего* требуется ввести следующие обозначения:

Π_{τ}, $\tau = 1, ..., \mathrm{T}-1$ – количество непересекающихся множеств $U_{\tau\pi}$, таких, что каждое множество $U_{\tau\pi}$ есть максимальное подмножество множества сценариев $\{1, ..., \mathrm{N}\}$, элементы которого являются сценариями, совпадающими до этапа τ включительно. Очевидно, что в начальный момент времени число Π_{1} равно единице, а множество U_{11} содержит все рассматриваемые сценарии.

Неотрицательность переменных:

$$x_{\tau\nu}^{mih} \ge 0,\ y_{\tau\nu}^{mih} \ge 0, \qquad (1)$$

$$\tau = 1, ..., \mathrm{T},\ \nu = 1, ..., \mathrm{N},\ m \in M_\tau \backslash \overline{M}_\tau,\ h \in H_{\tau\nu}^m,\ i \in I.$$

Ограничения незнания будущего:

$$x_{\tau\nu_1}^{mih} = x_{\tau\nu_2}^{mih},\ y_{\tau\nu_1}^{mih} = y_{\tau\nu_2}^{mih}, \qquad (2)$$

$$\tau = 1, ..., \mathrm{T}-1,\ \pi = 1, ..., \Pi_\tau,\ \nu_1, \nu_2 \in U_{\tau\pi},\ m \in M_\tau \backslash \overline{M}_\tau,\ h \in H_{\tau\nu}^m,\ i \in I.$$

Количество опционов в портфеле в начальный момент времени:

$$z_{\tau\nu}^{mih} = z_0^{mih},\ \tau = 1,\ \nu = 1, ..., \mathrm{N},\ m \in M_\tau,\ h \in H_{\tau\nu}^m,\ i \in I. \qquad (3)$$

Количество опционов в портфеле до перестройки на этапе τ при осуществлении сценария ν из числа доступных для торговли на предыдущем этапе:

$$z_{\tau\nu}^{mih} = z_{\tau-1,\nu}^{mih} + x_{\tau-1,\nu}^{mih} - y_{\tau-1,\nu}^{mih}, \qquad (4)$$

$$\tau = 2, ..., \mathrm{T},\ \nu = 1, ..., \mathrm{N},\ m \in \left(M_\tau \backslash \overline{M}_\tau\right) \cap M_{\tau-1},\ h \in H_{\tau\nu}^m,\ i \in I.$$

Количество опционов в портфеле до перестройки на этапе τ при осуществлении сценария ν из числа введенных в обращение на данном этапе:

$$z_{\tau\nu}^{mih} = 0, \qquad (5)$$

$$\tau = 2, ..., \mathrm{T},\ \nu = 1, ..., \mathrm{N},\ m \in \left(M_\tau \backslash \overline{M}_\tau\right) \backslash M_{\tau-1},\ h \in H_{\tau\nu}^m,\ i \in I.$$

Комиссия за перестройку портфеля:

$$C_{\tau\nu} = c \sum_{m\in M_\tau \backslash \overline{M}_\tau} \sum_{h\in H^m_{\tau\nu}} \sum_{i\in I} \left(x^{mih}_{\tau\nu} + y^{mih}_{\tau\nu}\right),\ \tau = 1, \ldots, \mathrm{T},\ \nu = 1, \ldots, \mathrm{N}. \qquad (6)$$

Стоимость перестройки портфеля:

$$Z_{\tau\nu} = \sum_{m\in M_\tau \backslash \overline{M}_\tau} \sum_{h\in H^m_{\tau\nu}} \sum_{i\in I} w^{mih}_{\tau\nu} \left(x^{mih}_{\tau\nu} - y^{mih}_{\tau\nu}\right) - \sum_{m\in \overline{M}_\tau} \sum_{h\in H^m_{\tau\nu}} \sum_{i\in I} w^{mih}_{\tau\nu} z^{mih}_{\tau\nu} + C_{\tau\nu}, \qquad (7)$$

$$\tau = 1, \ldots, \mathrm{T},\ \nu = 1, \ldots, \mathrm{N}.$$

Ликвидационная стоимость портфеля до перестройки:

$$L_{\tau\nu} = -\sum_{m\in M_\tau} \sum_{h\in H^m_{\tau\nu}} \sum_{i\in I} w^{mih}_{\tau\nu} z^{mih}_{\tau\nu},\ \tau = 1, \ldots, \mathrm{T},\ \nu = 1, \ldots, \mathrm{N}. \qquad (8)$$

Остаток счета до перестройки портфеля в начальный момент времени:

$$A_{\tau\nu} = A_0,\ \tau = 1,\ \nu = 1, \ldots, \mathrm{N}. \qquad (9)$$

Остаток счета до перестройки портфеля:

$$A_{\tau\nu} = A_{\tau-1,\nu} - Z_{\tau-1,\nu},\ \tau = 2, \ldots, \mathrm{T},\ \nu = 1, \ldots, \mathrm{N}. \qquad (10)$$

Остаток счета после перестройки портфеля не должен быть отрицательным:

$$A_{\tau\nu} \ge Z_{\tau\nu},\ \tau = 1, \ldots, \mathrm{T},\ \nu = 1, \ldots, \mathrm{N}. \qquad (11)$$

Оценка стоимости портфеля после перестройки составляет:

$$W_{\tau\nu} = A_{\tau\nu} - L_{\tau\nu} - C_{\tau\nu},\ \tau = 1, \ldots, \mathrm{T},\ \nu = 1, \ldots, \mathrm{N}. \qquad (12)$$

Пусть $\lambda_{\tau\nu k}^{mih}$ – потери по соответствующему опциону, определяемые на основе сценария SPAN с номером k, $k=1,...,16$, где 16 – количество сценариев SPAN. Начальная маржа по SPAN определяется переменной $\mu_{\tau\nu}$:

$$\mu_{\tau\nu} \ge \sum_{m\in M_\tau \setminus \overline{M}_\tau} \sum_{h\in H_{\tau\nu}^m} \sum_{i\in I} \lambda_{\tau\nu k}^{mih}\left(z_{\tau\nu}^{mih} + x_{\tau\nu}^{mih} - y_{\tau\nu}^{mih}\right), \tag{13}$$

$$\tau = 2,...,\mathrm{T},\ \nu = 1,...,\mathrm{N},\ k = 1,...,16 .$$

Из данного ограничения следует, что значение параметра $\mu_{\tau\nu}$ не может быть меньше максимального из возможных для сценариев SPAN убытка, называемого *сканируемым риском*. Если ограничение (формула 13) выполняется как равенство, то $\mu_{\tau\nu}$ в точности равно сканируемому риску SPAN.

Для удержания позиции стоимость портфеля после его перестройки должна быть не меньше требуемой начальной маржи. Для обеспечения этого требования вводится бюджетное ограничение:

$$W_{\tau\nu} \ge \beta\mu_{\tau\nu},\ \tau = 1,...,\mathrm{T},\ \nu = 1,...,\mathrm{N}, \tag{14}$$

где β – коэффициент запаса начальной маржи для снижения вероятности ситуаций маржин-колл. Требования биржи соответствуют $\beta = 1$.

Стоимость портфеля на последнем этапе, соответствующем инвестиционному горизонту, должна быть не меньше заданной величины, определяющей доходность инвестиций. Ожидаемая доходность любого портфеля опционов на риск-нейтральном рынке соответствует безрисковой ставке процента. Получить ожидаемую доходность выше безрисковой ставки можно только с вероятностью меньше единицы. Будем называть сценарий ν активным, если соответствующая булева переменная $a_\nu = 0$ и неактивным если $a_\nu = 1$. Введем следующее ограничение, называемое вероятностным ограничением:

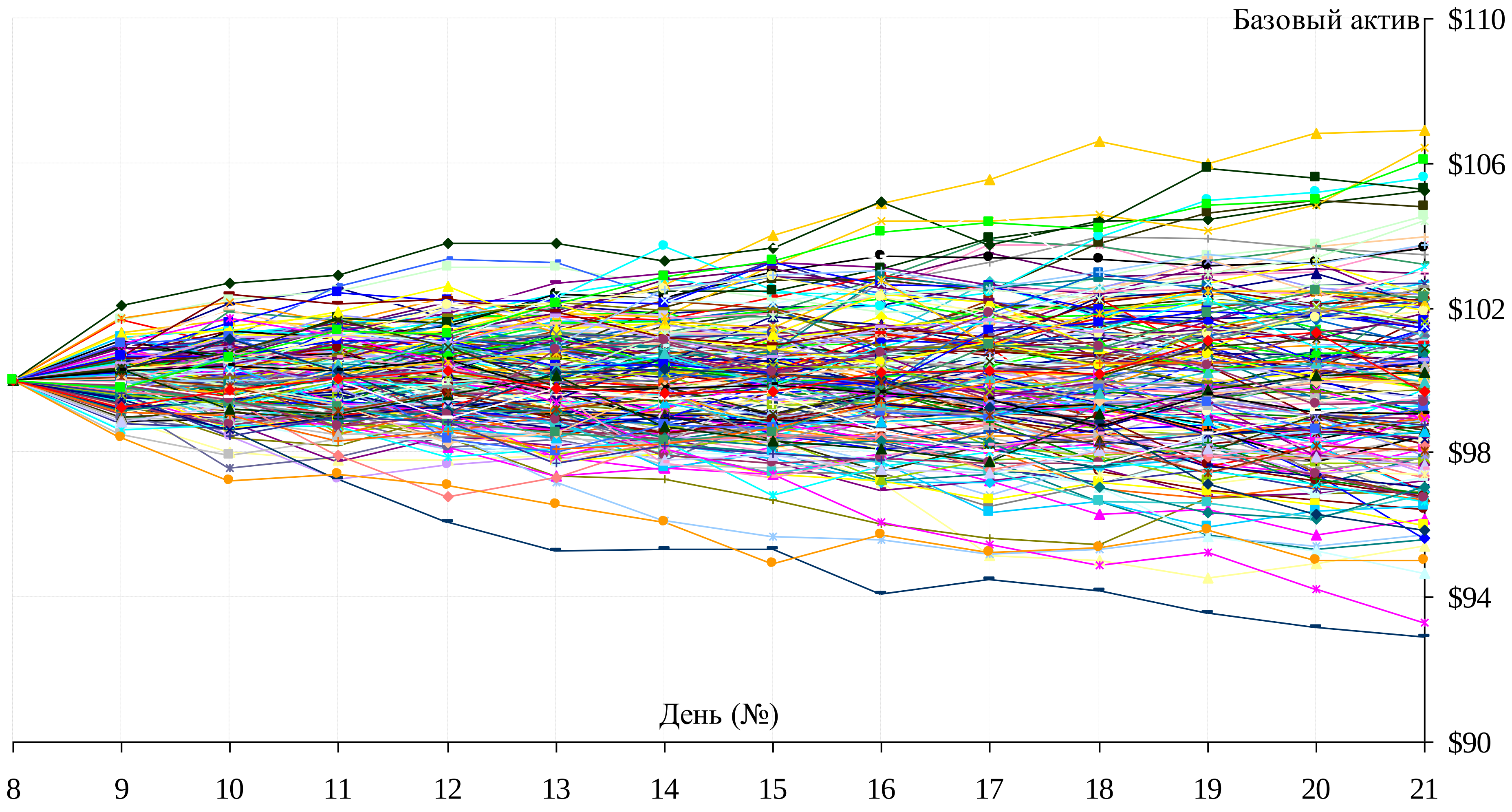
$$W_{\mathrm{T}\nu} \geq u \,,\ \forall\ \nu = 1, \ldots, \mathrm{N} :\ a_\nu = 0 \,, \tag{15}$$

где u – минимальная требуемая инвестором стоимость портфеля в терминальный момент времени для активных сценариев.

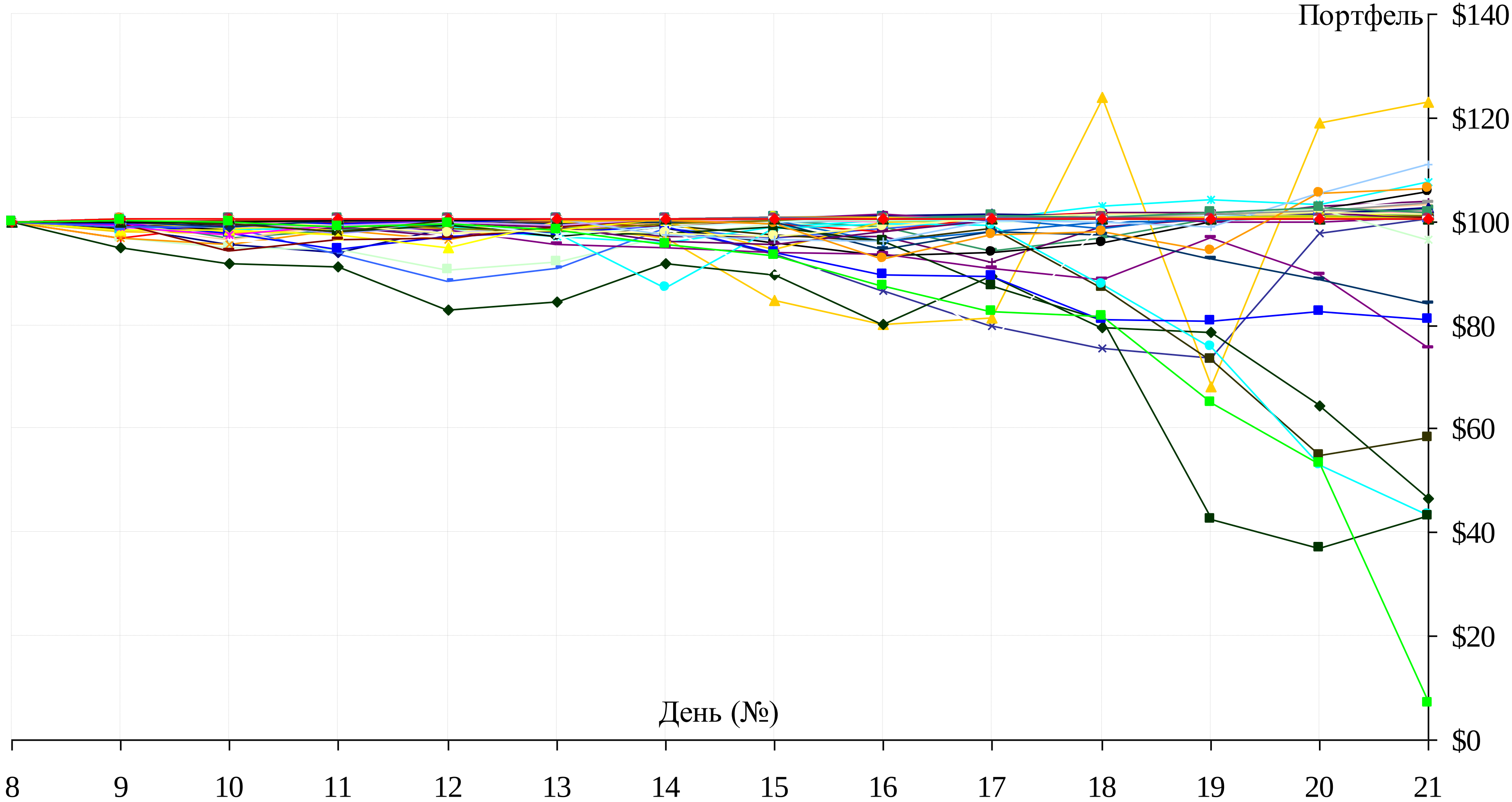
Критерий оптимизации портфеля:

$$\min \sum_{\nu=1}^{\mathrm{N}} a_\nu p_\nu \,. \tag{16}$$

Имитационное моделирование изменения цены базового актива



Траектории изменения стоимости портфеля



Сводная таблица результатов имитационного моделирования динамического и статического управления портфелем опционов

Показатель	Динамическое управление	Статическое управление
Количество экспериментов	300	300
Средняя стоимость портфеля в терминальный момент времени	$99,49	$98,93
Количество экспериментов в которых стоимость портфеля в терминальный момент времени ниже требуемой	11	16
Количество ситуаций маржин-колл	2	7
Ожидаемый риск портфеля	2,76%	3,26%
Наблюдаемый риск портфеля	3,67%	5,33%
Абсолютное отклонение наблюдаемого риска портфеля от ожидаемого	0,90%	2,07%

Анатолий Абрамов
a.abramov@zenit.ru