

# Модель сценариев кривой процентных ставок китайского рынка **Shibor**

Руководитель группы  
моделирования департамента  
финансовых рисков

Данилишин Артем Ростиславович



1. Обзор и анализ данных ставок китайского рынка Shibor;
2. Моделирование смеси распределений;
3. EM алгоритм;
4. Модель сценариев кривой процентных ставок китайского рынка Shibor;
5. Результаты моделирования (бек-тестирование).

- Рассматриваемые срочности ставки Shibor: 1W, 2W, 1M, 3M, 6M, 9M, 12M;
- Рассматриваемый исторический период: 31/07/2013 – 31/07/2023 (2 495 дней).

Рис. 1. Графики ставки Shibor для разных теноров

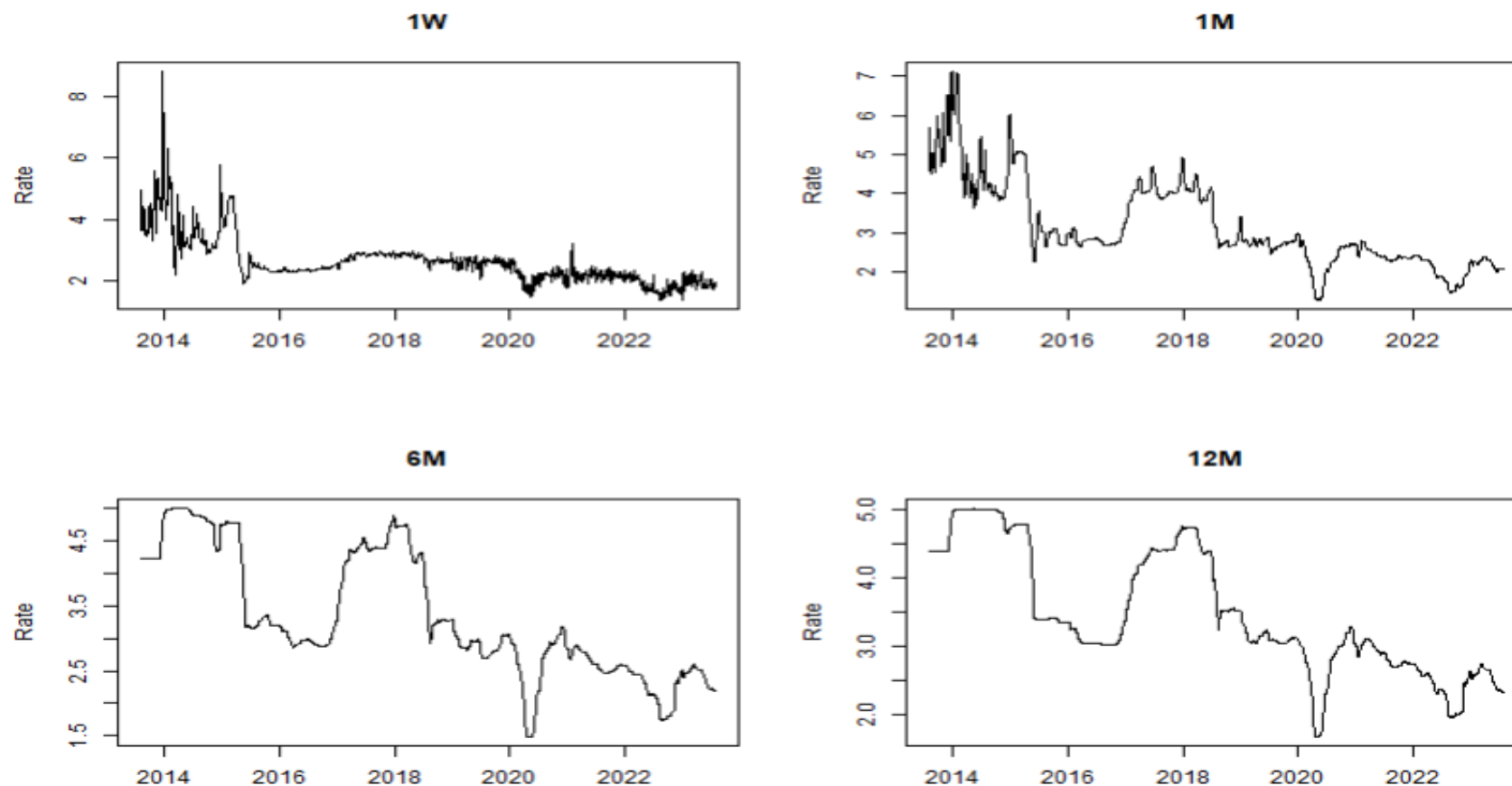


Рис. 2. Гистограммы распределений ставки Shibor для разных теноров

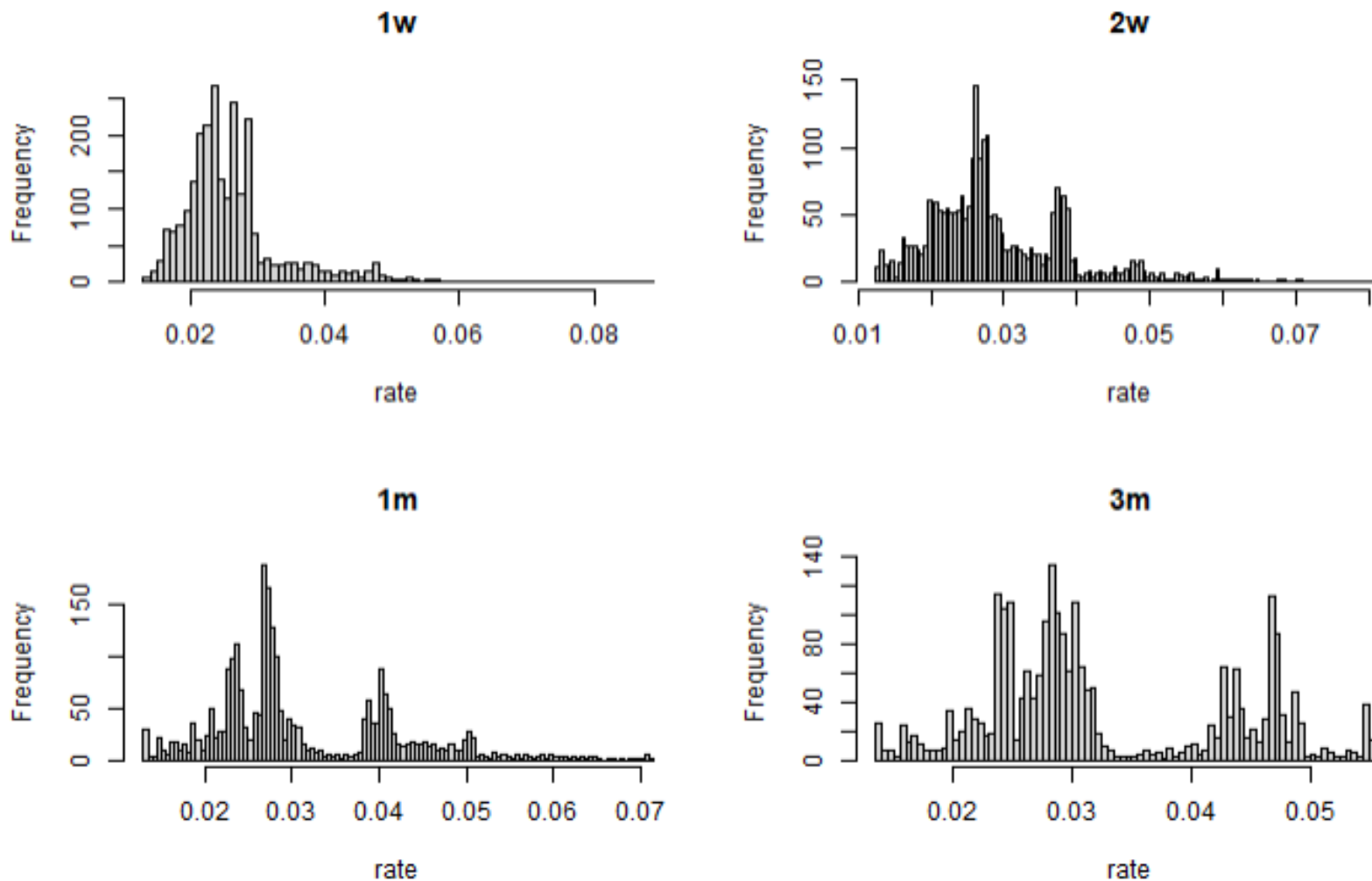


Рис. 3. Графики Каллена и Фрея ставки Shibor для теноров 1W, 2W, 1M, 3M

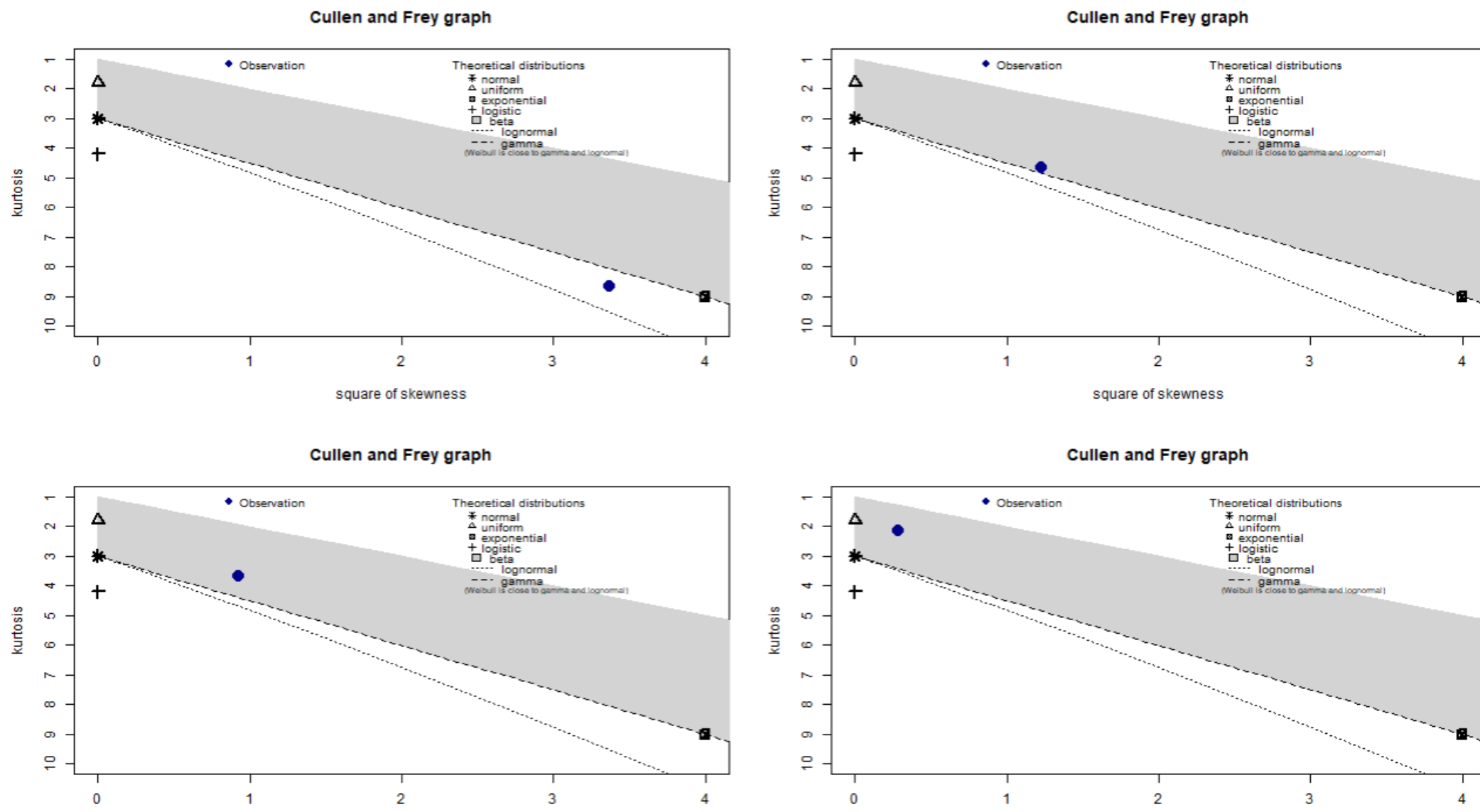


Рис. 4. Гистограммы распределений разности ставки Shibor для различных теноров

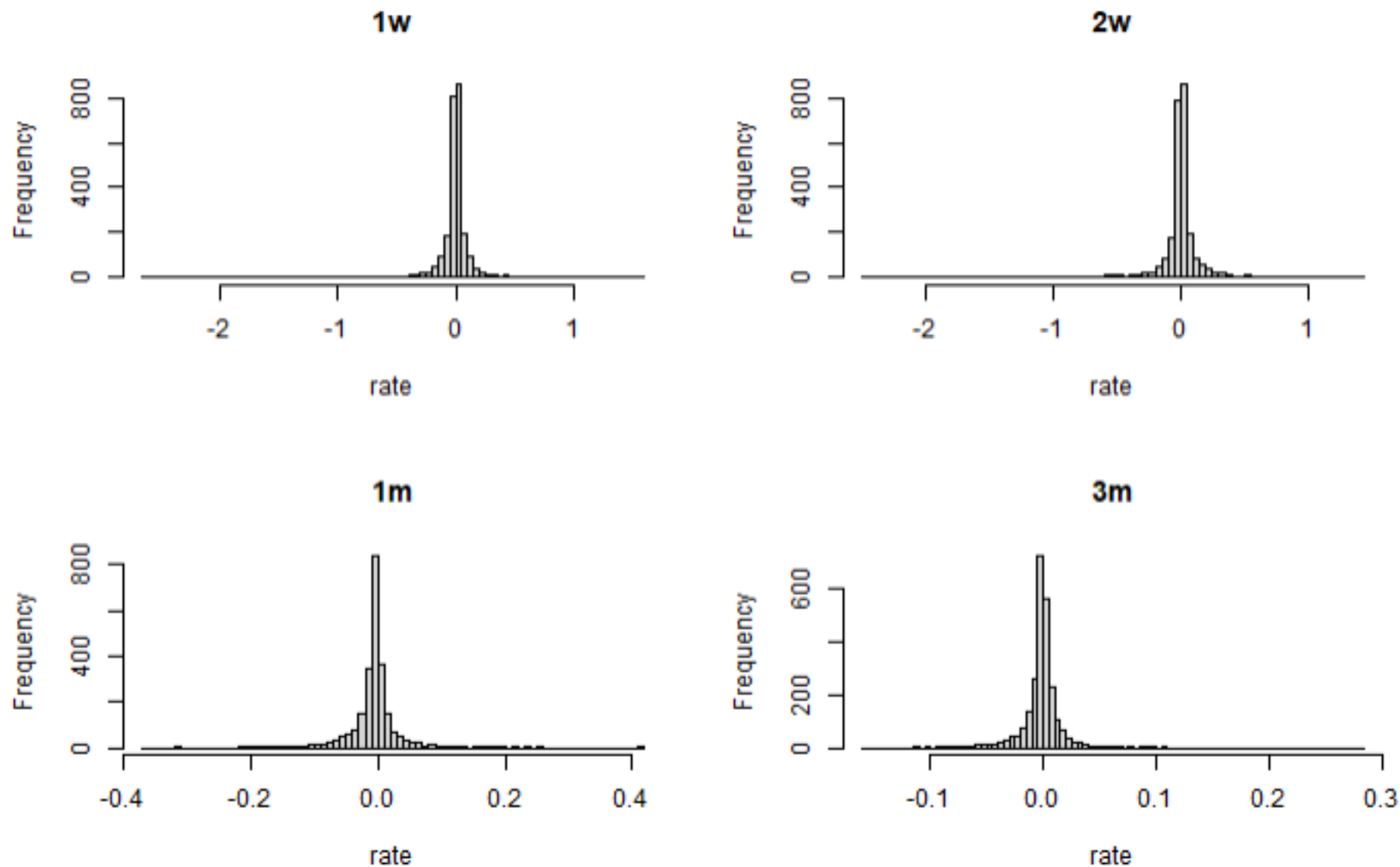


Рис. 5. Графики Каллена и Фрея разности ставки Shibor для теноров 1W, 2W, 1M, 3M

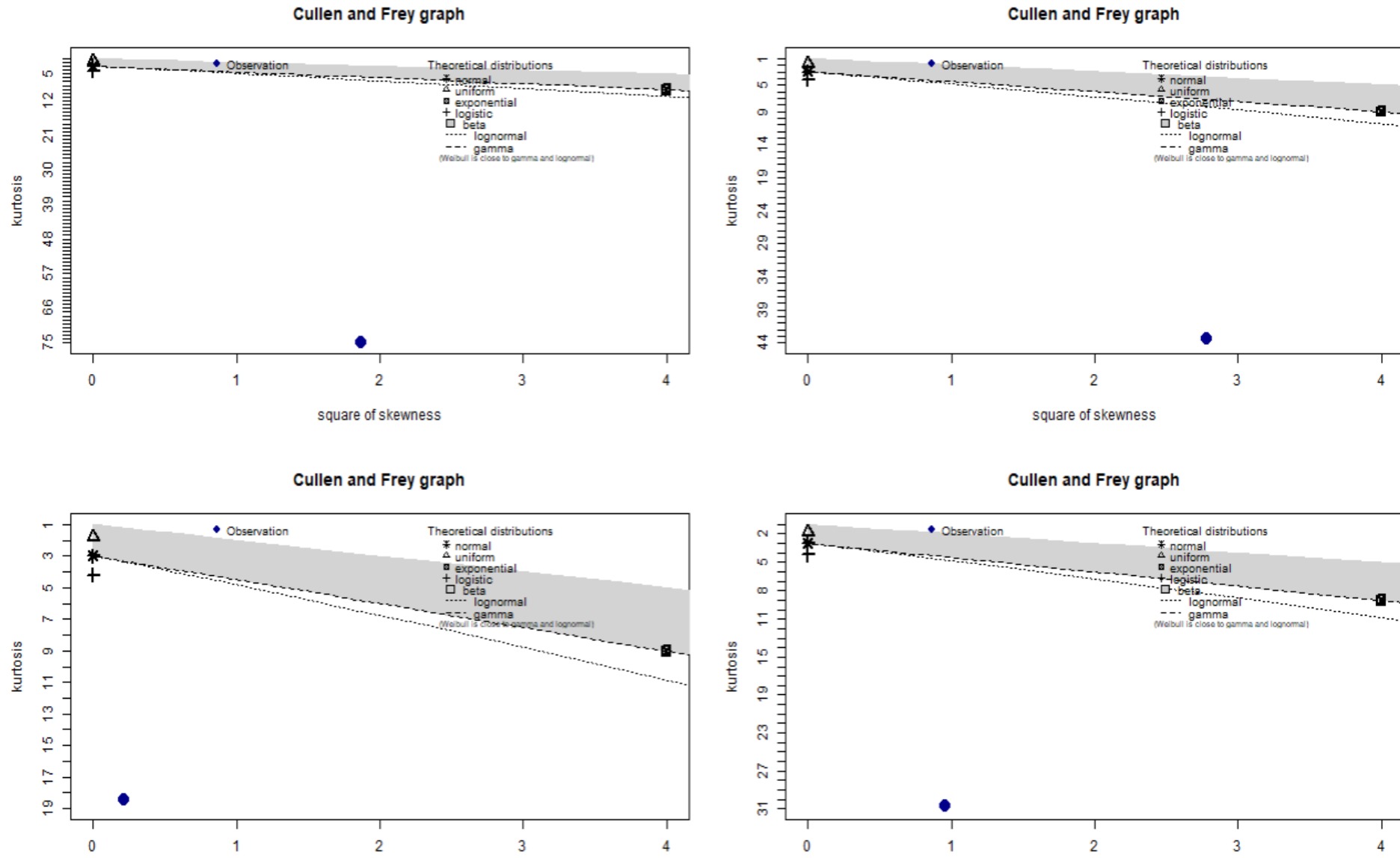


Таблица 1. Корреляционная матрица ставки Shibor для различных срочностей

	<b>1w</b>	<b>2w</b>	<b>1m</b>	<b>3m</b>	<b>6m</b>	<b>9m</b>	<b>12m</b>
<b>1w</b>	1	0.934995	0.903882	0.825787	0.778069	0.781926	0.788027
<b>2w</b>	0.934995	1	0.946542	0.885403	0.853605	0.852101	0.856056
<b>1m</b>	0.903882	0.946542	1	0.950678	0.916052	0.908773	0.91092
<b>3m</b>	0.825787	0.885403	0.950678	1	0.985994	0.978967	0.977416
<b>6m</b>	0.778069	0.853605	0.916052	0.985994	1	0.996788	0.995053
<b>9m</b>	0.781926	0.852101	0.908773	0.978967	0.996788	1	0.999264
<b>12m</b>	0.788027	0.856056	0.91092	0.977416	0.995053	0.999264	1



Рис. 6. Гистограммы первых четырех главных компонент

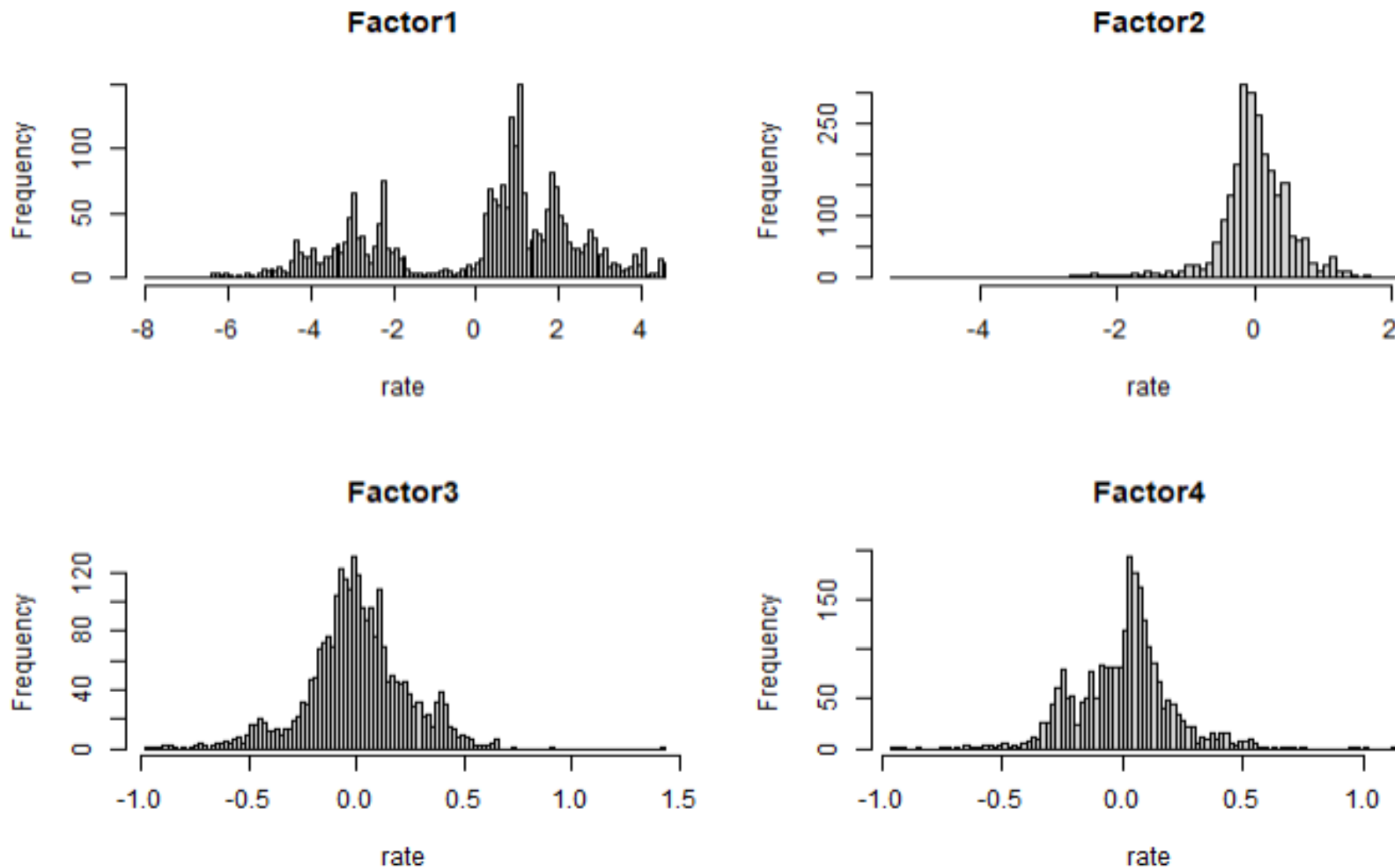
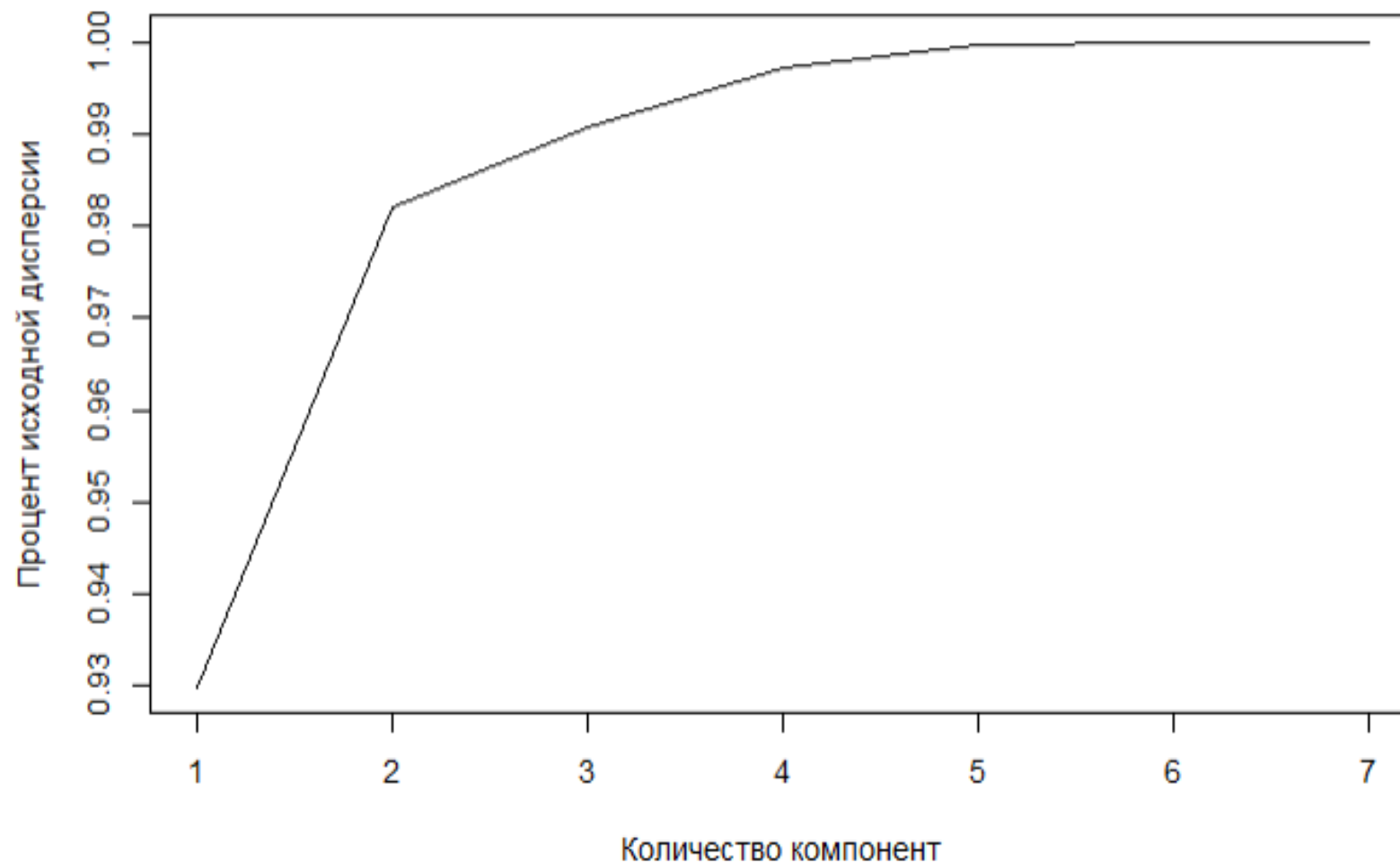


Рис. 7. Зависимость описываемой дисперсии от числа используемых главных компонент



Исходное распределение представляется в следующем виде:

$$p(x) = \sum_{j=1}^k w_j \varphi(x, \theta_j), \quad \sum_{j=1}^k w_j = 1$$

где:

- $\varphi(x, \theta_j) = p(x|j)$  – функция правдоподобия  $j$  – й компоненты;
- $\theta_j$  - вектор параметров функции правдоподобия  $j$ -й компоненты;
- $w_j = p(j)$  – априорная вероятность  $j$  – й компоненты.

$$L(w, \theta) = \ln \prod_{i=1}^l p(x_i) = \sum_{i=1}^l \ln \sum_{j=1}^k w_j \varphi(x_i, \theta_j) \rightarrow \max_{w, \theta}$$

$$\sum_{j=1}^k w_j = 1, w_j \geq 0.$$

Лагранжиан оптимизационной задачи  $L(w, \theta) \rightarrow \max_{w, \theta}$

$$\mathcal{L}(w, \theta) = \sum_{i=1}^l \ln \sum_{j=1}^k w_j \varphi(x_i, \theta_j) - \lambda \left( \sum_{j=1}^k w_j - 1 \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_j} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^l \frac{w_j \varphi(x_i, \theta_j)}{p(x_i)} = \lambda w_j; \lambda = l; w_j = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l g_{ij}; g_{ij} = \frac{w_j \varphi(x_i, \theta_j)}{p(x_i)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^l \frac{w_j \varphi(x_i, \theta_j)}{p(x_i)} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} \varphi(x_i, \theta_j)}{\varphi(x_i, \theta_j)} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} \sum_{i=1}^l g_{ij} \ln \varphi(x_i, \theta_j) = 0$$

**Вход:**  $X_l = \{x_1, \dots, x_l\}, k$ ;

**Выход:**  $(w_j, \theta_j)_{j=1}^k$  – параметры смеси распределений;

**Инициализация:**  $(\theta_j)_{j=1}^k; w_j = \frac{1}{k}$ ;

**Е-шаг:** для всех  $i = 1, \dots, l; j = 1, \dots, k$

$$g_{ij} = \frac{w_j \varphi(x_i, \theta_j)}{\sum_{s=1}^k w_s \varphi(x_i, \theta_s)}$$

**М-шаг:** для всех  $j = 1, \dots, k$

$$\theta_j = \operatorname{argmax}_{\theta} \sum_{i=1}^l g_{ij} \ln \varphi(x_i, \theta); w_j = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l g_{ij}$$

Выполнять шаги Е и М пока не сойдутся  $w_j, \theta_j$ .

Выбор числа компонентов смеси  $k$  осуществляется в соответствии с Байесовским информационным критерием ( $BIC$ )

$$BIC = -2 \ln(\mathcal{L}(w, \theta)) + 3k \ln(l)$$

Рис. 8. График значений  $BIC$  при разных значениях параметра  $k$

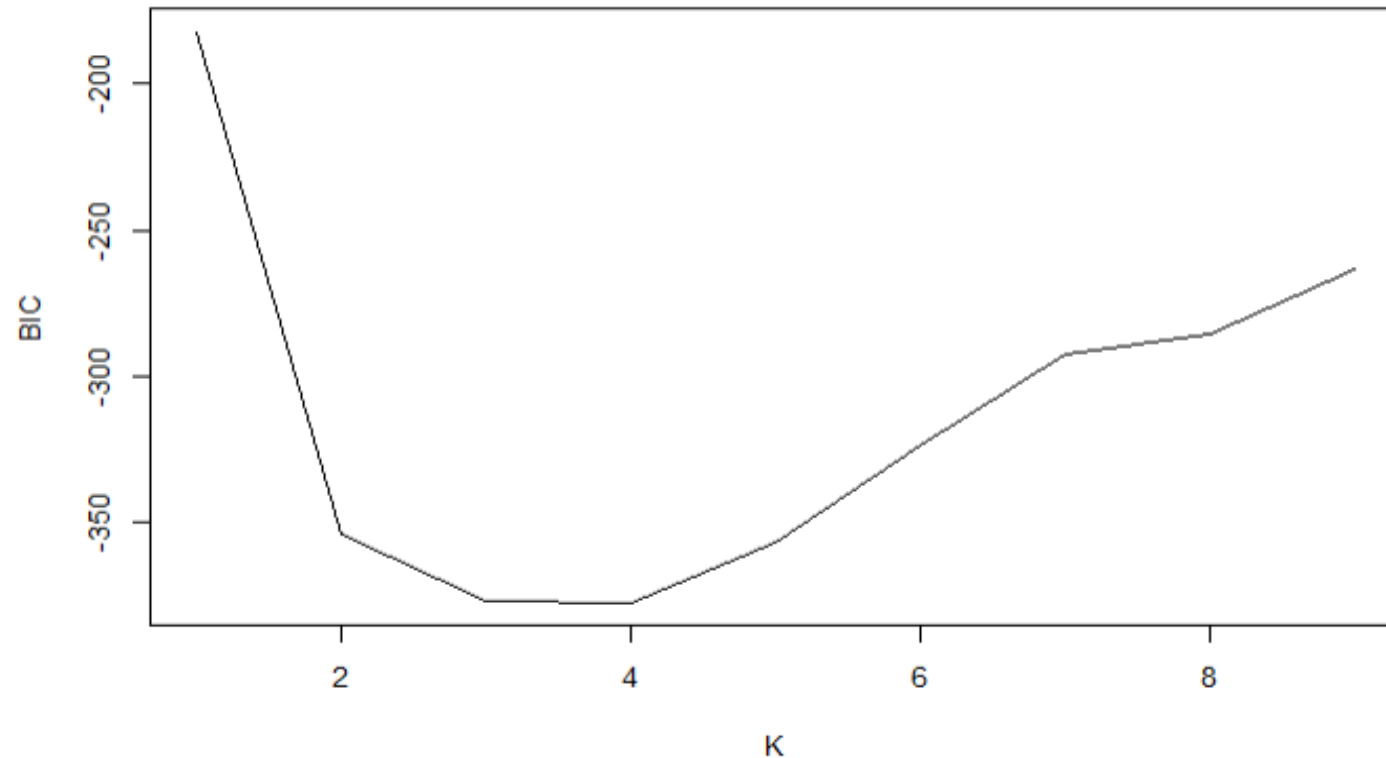
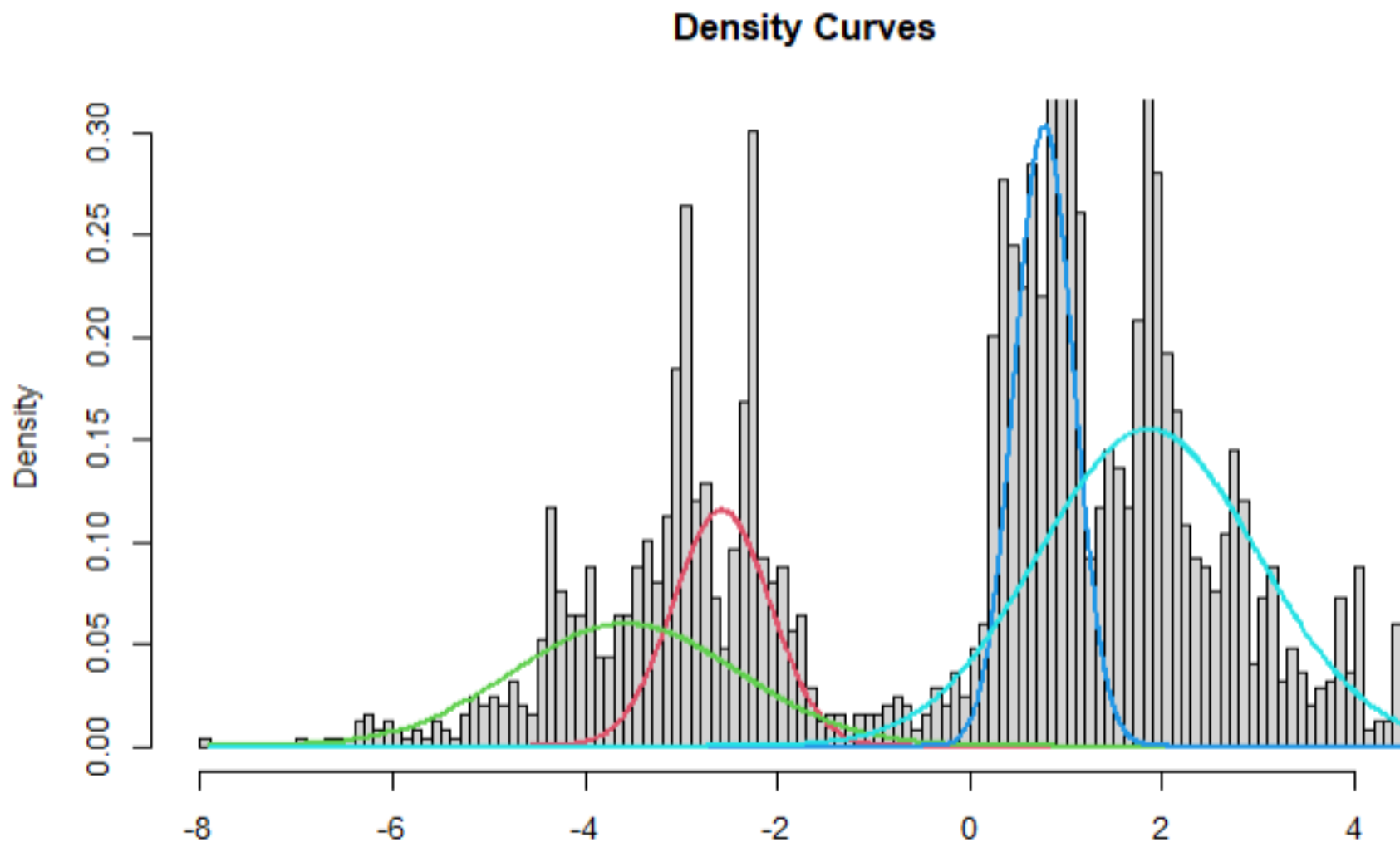


Рис. 9. Результат деления смеси распределения первой компоненты



Пусть  $r_t^k$  — обозначает ставки Shibor где  $k \in \{1w, 2w, 1m, 3m, 6m, 9m, 12m\}$

$$\tilde{r}_t^k = \frac{r_t^k - \widehat{\mathbb{E}}[r_t^k]}{\sqrt{\widehat{\mathbb{D}}[r_t^k]}}$$

где  $\widehat{\mathbb{E}}[r_t^k]$ ,  $\widehat{\mathbb{D}}[r_t^k]$  — статистические оценки математического ожидания и дисперсии ставок Shibor.

$$\tilde{r}_t^k = \sum_{j=1}^3 \alpha^{kj} X_t^j,$$

$$p(X_t^1) = \sum_{j=1}^4 w_j \varphi(X_t^1, \theta_j), \quad \sum_{j=1}^4 w_j = 1,$$

$$X_t^1 = \alpha^j + \beta^j X_{t-1}^1 + \xi_t^j, \quad \xi_t^j \sim N(0, \delta^j)$$

$$[X_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] = \alpha^j + \beta^j X_{t-1}^1; \quad \mathbb{D}[X_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] = \delta^{j^2}$$

$$X_t^k = \alpha^k + \beta^k X_{t-1}^k + \xi_t^k, \quad \xi_t^k \sim N(0, \delta^k), \quad k \in \{1, 2\}.$$

$$\varphi(X_t^1, \theta_j) = \frac{1}{\delta^j \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{X_t^1 - (\alpha^j + \beta^j X_{t-1}^1)}{\delta^j} \right)^2}$$



Интервал тестирования: **31.07.2013 - 31.07.2023 (2 495 точек)**

Если случайная величина  $X$  имеет функцию распределения  $F_X$ , то случайная величина  $Y = F_X(X)$  распределена равномерно на отрезке  $[0, 1]$ .

По  $N$  сценариям получаем эмпирические функции распределения  $\widehat{F}_X(x)_{i,j}$ , где  $i = \overline{1, N}$ , тогда по историческим значениям можно найти  $x_{i,j}^*$  перцентиль  $\mathbf{u}_{i,j}^* = \int_{x_{min}}^{x^*} \widehat{F}_{X_n}(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n I\{x_{i,j}^s \leq x_{i,j}^*\}$ , где  $s$  – индекс симуляции Монте-Карло,  $I\{\cdot\}$  – индикаторная функция.

Множество точек  $\{\mathbf{u}_{i,j}^*\}$  распределено равномерно на отрезке  $[0, 1]$

### Тест Колмогорова-Смирнова

$K = \sup_{t \in [0,1]} |B(t)|$ , где  $B(t)$  – броуновский мост

$$P(K \leq x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2k-1)^2 \pi^2 / (8x^2)}$$

$$d_{KS_n} = \sup_x |\widehat{F}_{X_n}(x) - F(x)| \quad \sqrt{n} d_{KS_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup_t |B(F(t))|$$

**H0:** Выборка  $X_n$  подчиняется распределению  $F(x)$

$$\sqrt{n} d_{KS_n} > K_\alpha, \quad \text{где } P(K \leq K_\alpha) = 1 - \alpha$$

Рис. 10. Сценарии ставки Shibor срочностью 2W

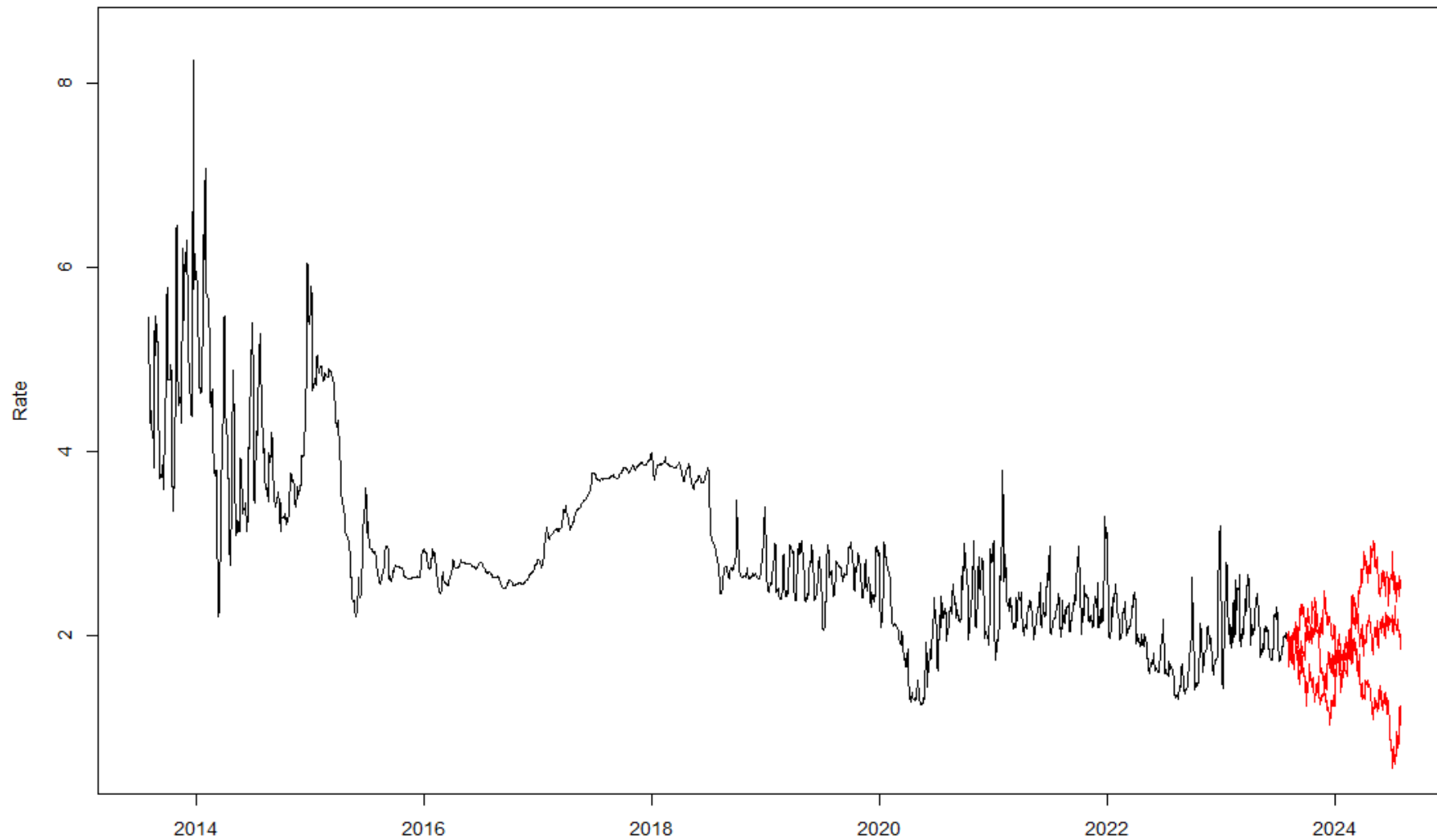


Рис. 11. Сценарии ставки Shibor срочностью 3М

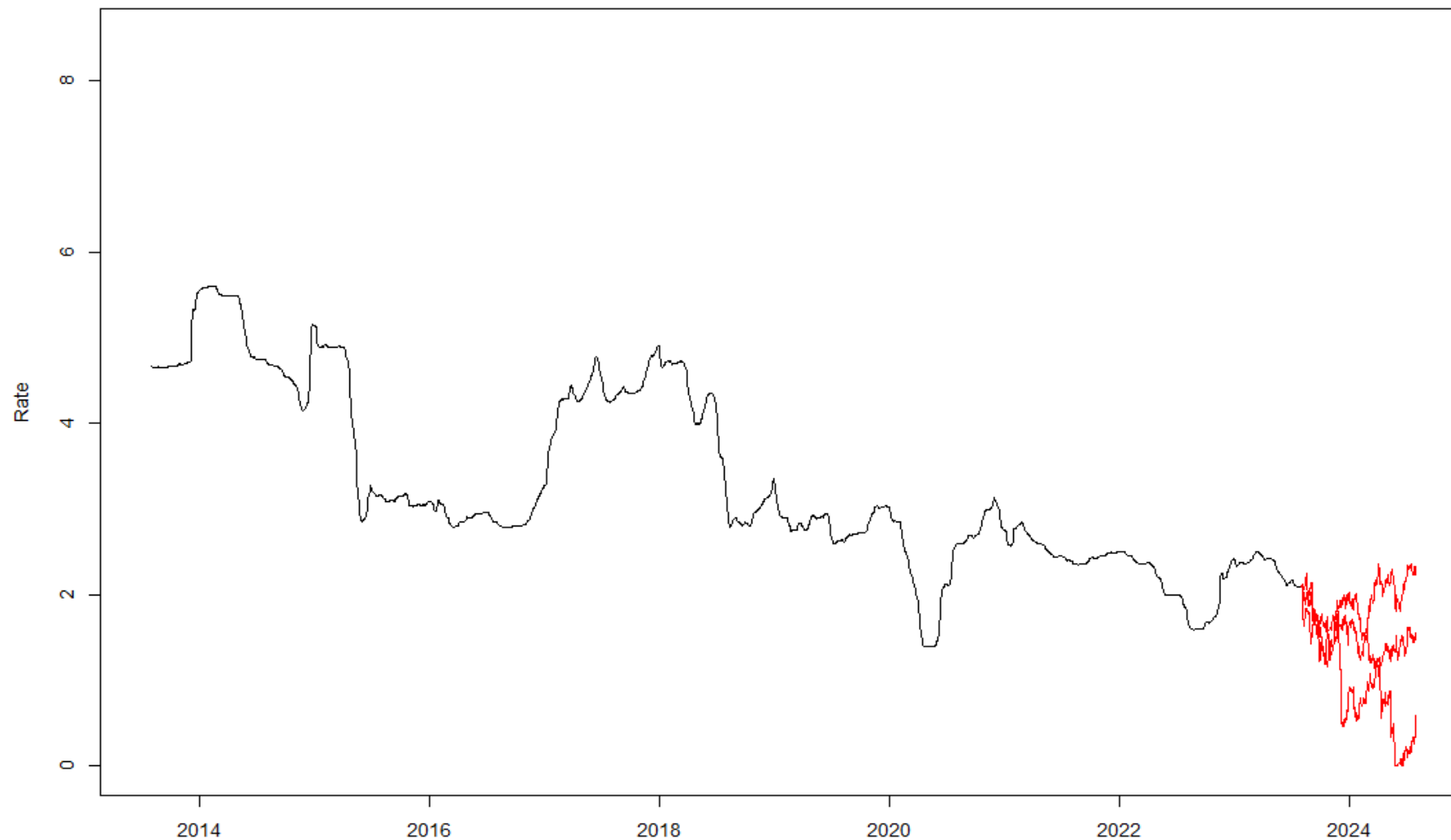


Рис. 12. Сценарии ставки Shibor срочностью 9М

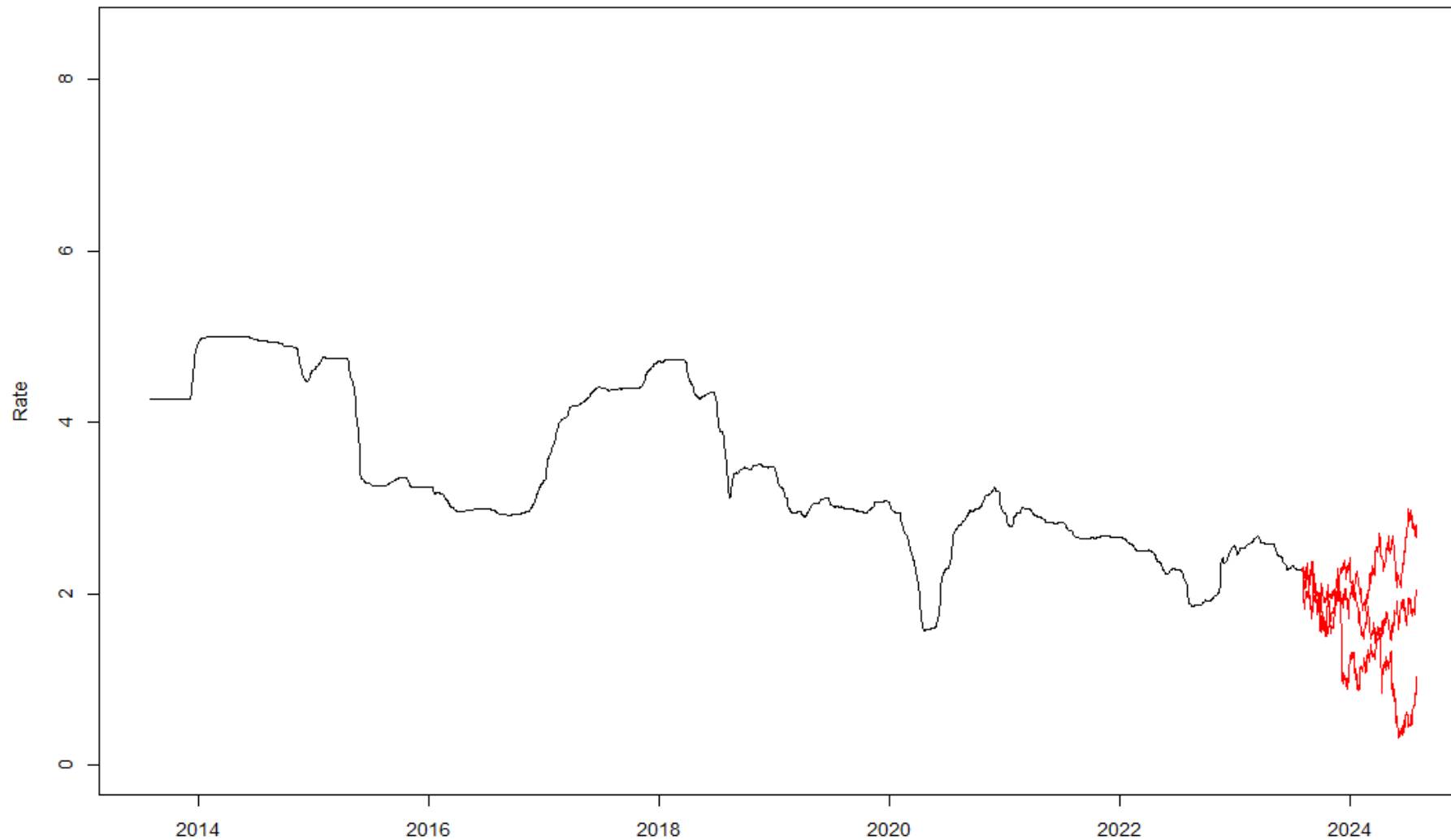


Рис. 13. Результаты бек-тестирования для тенора 2W

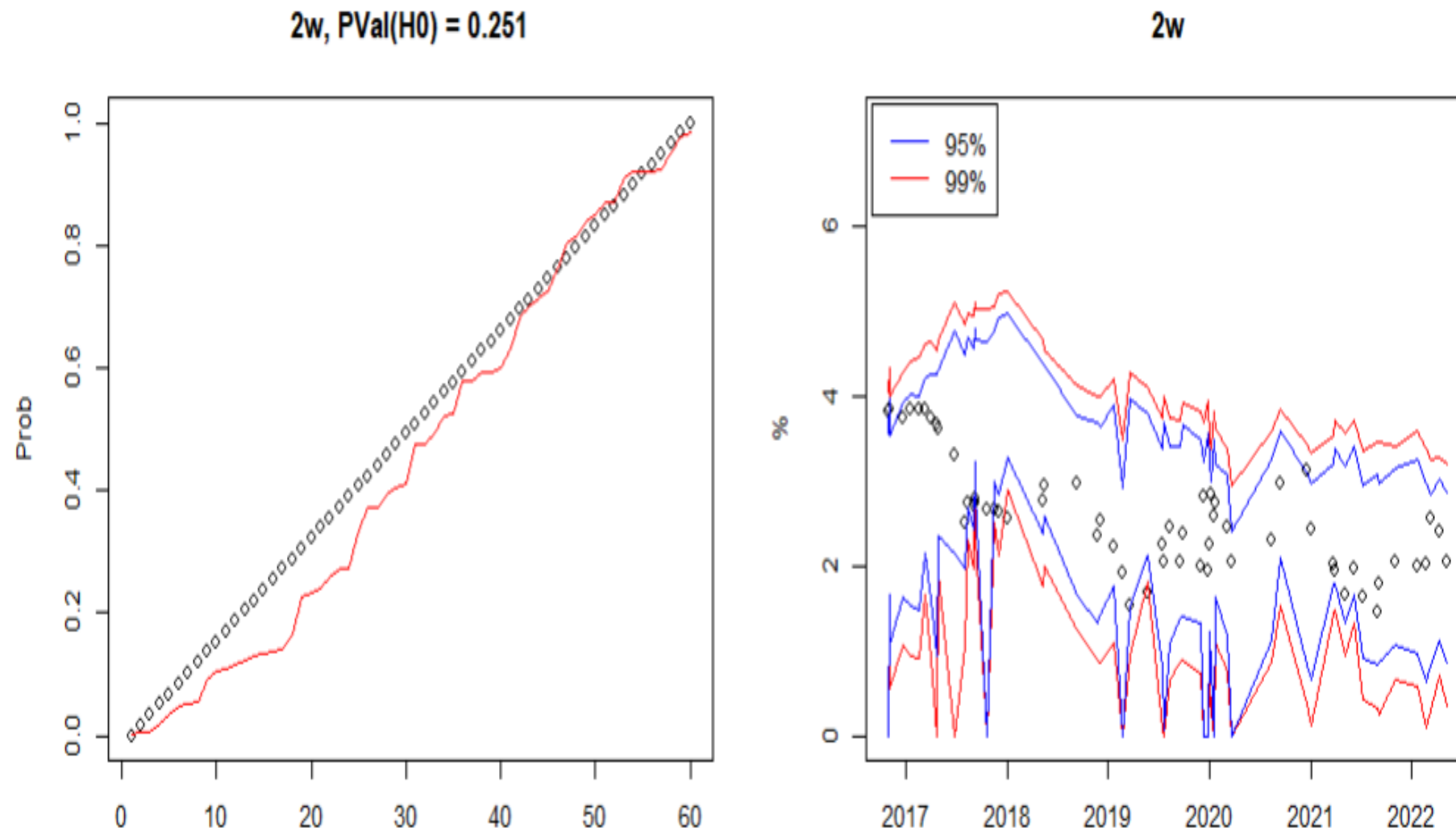


Рис. 14. Результаты бек-тестирования для тенора 3М

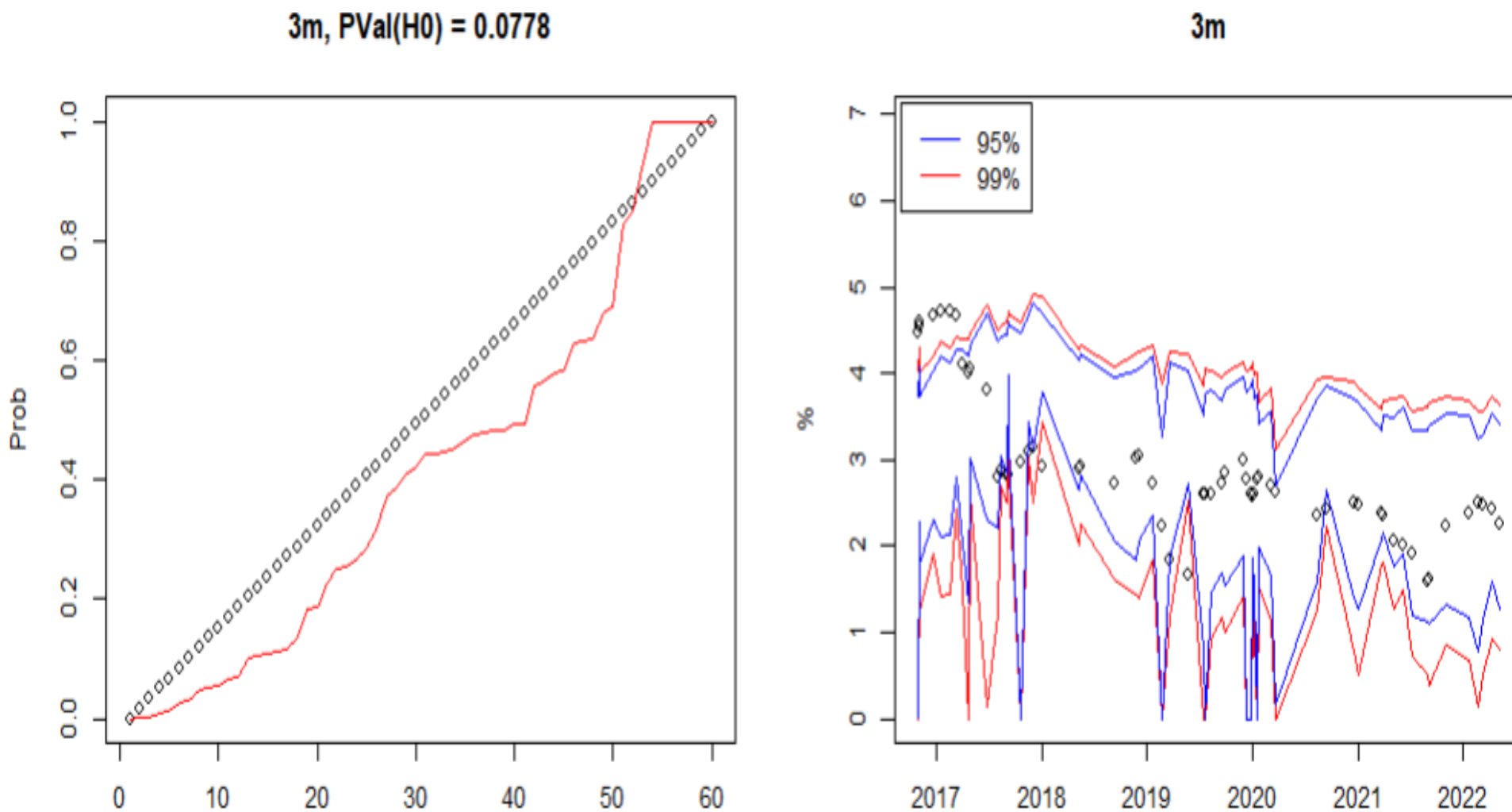


Рис. 15. Результаты бек-тестирования для тенора 9М

